הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל 6.12.2015
המרכז ללמודים קדם-אקדמיים

מבחן אמצע סמסטר א' במתמטיקה

הנחיות לנבחן
א. משך המבחן שעתיים. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן.
ב. יש לפתור את כל השאלות.
ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות וברשימת המשפטים המצורפים לשאלון המבחן בלבד.
ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.
ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.
ו. כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ואינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

שאלה 1 - 24%

16% א. צייר רְשֹמֶת (סקיצה) של גרף הפונקציה $y=\left|\,x^2-3|x+1|+1\,\right|$.

8% ב. פתור את המשוואה $\left|\,x^2-3|x+1|+1\,\right|=2$

שאלה 2 - 20%

פתור: $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}\le\sqrt{3}$

שאלה 3 - 32%
יש לפתור שאלה זו **באמצעות גיאומטרית המישור בלבד**. מומלץ להשתמש בכלי שרטוט.

16% א. הגדרה: זווית ראיה של מעגל מנקודה חיצונית היא הזווית בין שני משיקים למעגל שיוצאים מאותה נקודה.
הוכח כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים מעגל בזווית הנתונה α הוא גם מעגל.

16% ב. הזווית החדה במקבילית שווה ל- 60° והיקפה 90 ס"מ. אלכסון המקבילית מחלק את הזווית הקהה לשתי זוויות ביחס $3:1$. חשב את אורך הצלעות של המקבילית.

שאלה 4 - 24%

עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $(m+2)\dfrac{1}{x^2}-2(m+3)\dfrac{1}{x}+m-1=0$ שני שורשים x_1, x_2 המקיימים
$x_1>2\ ,\ 0<x_2\le 1$?

בהצלחה!

1

$y = \left| x^2 - 3|x+1| + 1 \right|$

$\to x > -1 \Rightarrow y = x^2 - 3x - 3 + 1 = x^2 - 3x - 2$

$\to x \leq -1 \Rightarrow y = x^2 + 3x + 3 + 1 = x^2 + 3x + 4$

$\Delta = -7$

$(-1, 2)$

$\Delta = 17$

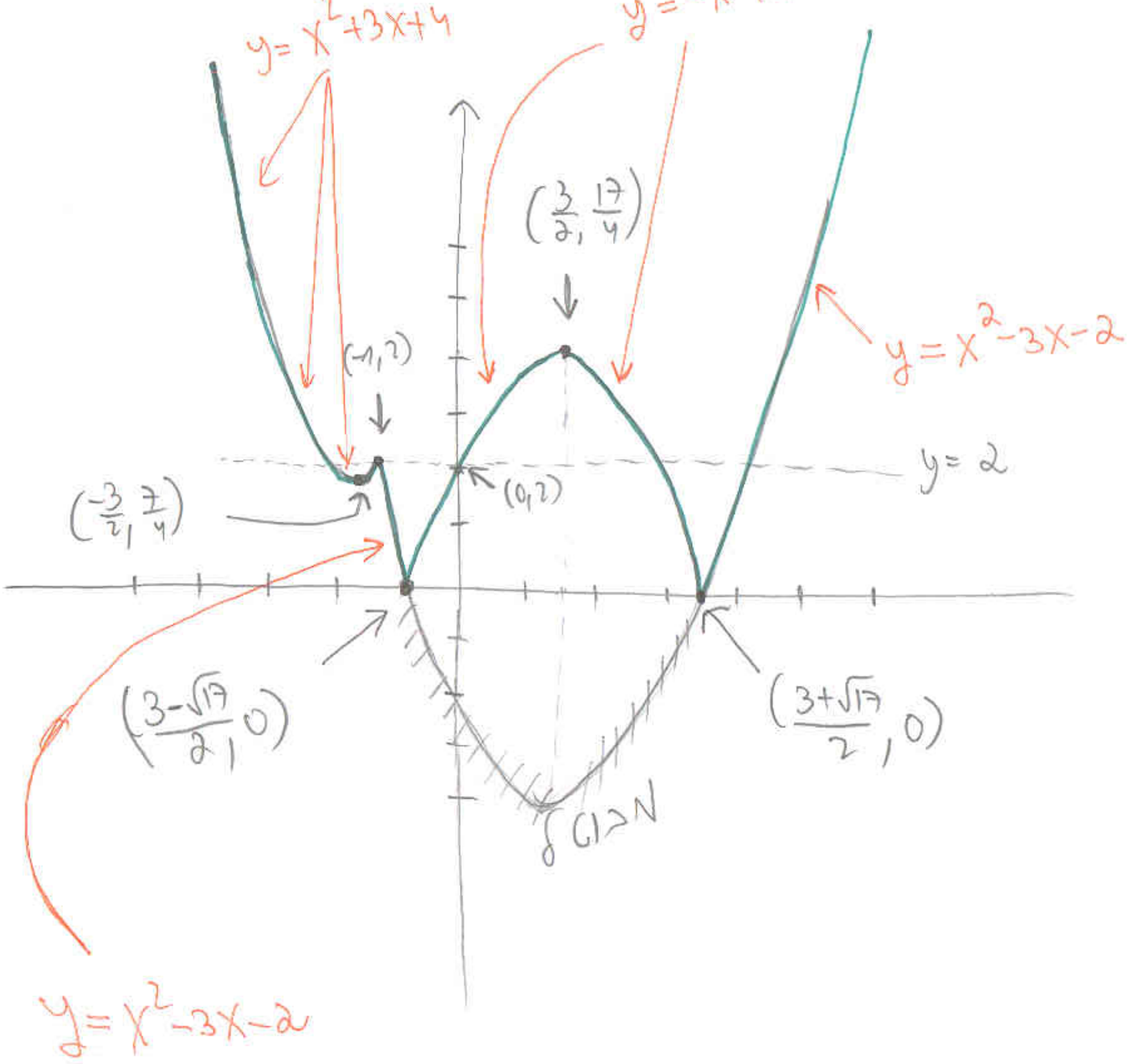
$\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

קודקוד $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

אח״כ נבטל ערך מוחלט

קודקוד $\left(\frac{-3}{2}, \frac{7}{4}\right)$

קודקוד $\left(\frac{3}{2}, \frac{-17}{4}\right)$



$y = 2$

$x^2+3x+4=2$	$-x^2+3x+2=2$	$x^2-3x-2=2$
$x^2+3x+2=0$	$-x^2+3x=0$	$x^2-3x-4=0$
$\boxed{x=-2 \quad x=-1}$	$x(3-x)=0$	$(x-4)(x+1)=0$
	$\boxed{x=0 \quad x=3}$	$x=4$
		$x=-1$

$\boxed{\begin{array}{cc} x=-1 & x=0 \\ \hline x=-2 & x=4 \end{array}}$

$\boxed{x=3}$

(2)

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}\le\sqrt{3}$$

$$\frac{x+\sqrt{}-x+\sqrt{}}{(x-\sqrt{})(x+\sqrt{})}\le\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{}}{x^2-(x^2-x)}\le\sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{2\sqrt{}}{x}\le\sqrt{3}}$$

לבדוק
צריך כך

$$\boxed{\frac{2\sqrt{x^2-x}}{x}-\sqrt{3}\le 0}$$

לבדוק
צריך כן

$$x^2-x\ge 0$$

$$x(x-1)\ge 0$$

$x\ge 1$
$x\le 0$

$$x\mp\sqrt{x^2-x}\ne 0$$

$$x\ne\pm\sqrt{x^2-x}$$

$$x^2\ne x^2-x$$

$$x\ne 0$$

$$\boxed{\begin{matrix}x\ge 1\\ x<0\end{matrix}}$$

פרק א — נפתור בעזרת משוואה

$$\frac{2\sqrt{x^2-x}}{x}=\sqrt{3}$$

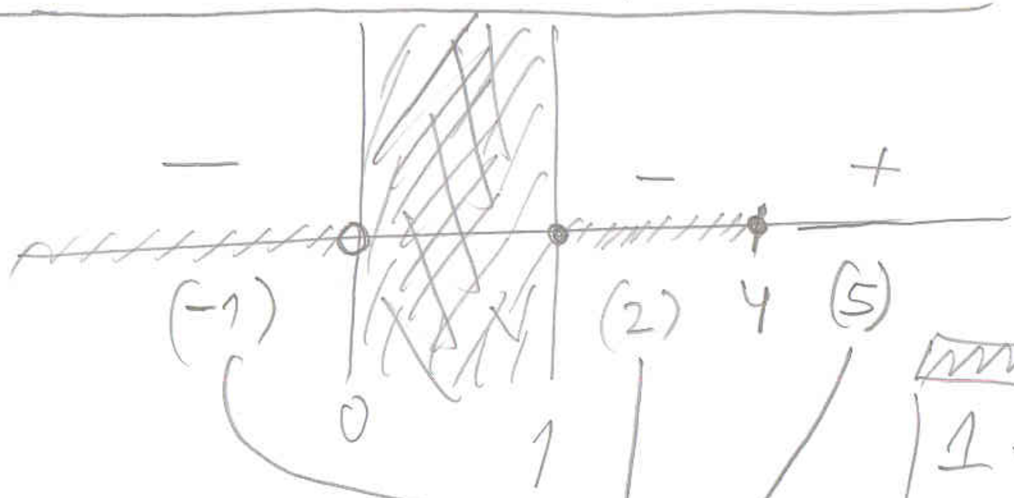
$$2\sqrt{x^2-x}=\sqrt{3}x$$

$$4x^2-4x=3x^2$$

$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

$$\boxed{\cancel{x=0}}\quad\boxed{x=4}$$



$$\boxed{\begin{array}{c}1\le x\le 4\\ x<0\end{array}}$$

הצבה

$$\frac{2\sqrt{x^2-x}}{x}-\sqrt{3}\le 0$$

$\frac{2\sqrt{1+1}}{-1}-\sqrt{3}$ שלילי	$\frac{2\sqrt{4-2}}{2}-\sqrt{3}$ $\frac{2\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$ $\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}$ שלילי	$\frac{2\cdot\sqrt{25-5}}{5}-\sqrt{3}$ $\frac{2}{5}\cdot 2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ $\frac{4\sqrt{5}}{5}-\sqrt{3}$ $\frac{4}{\sqrt{5}}-\sqrt{3}$ חיובי

פרק ד' - נפתור בעזרת חלוקה למקרים

$$\frac{\overbrace{2\sqrt{x^2-x}}^{\text{תמיד חיובי או אפס.}}}{x} \le \sqrt{3}$$

או

$x < 0$

$\Downarrow$

שלילי או אפס $\le \sqrt{3}$

תמיד

$\Downarrow$

$\boxed{x<0}$

$x \ge 1$

$\left(2\sqrt{x^2-x}\right)^2 \le \left(\sqrt{3}x\right)^2$

$4x^2-4x \le 3x^2$

$x^2-4x \le 0$

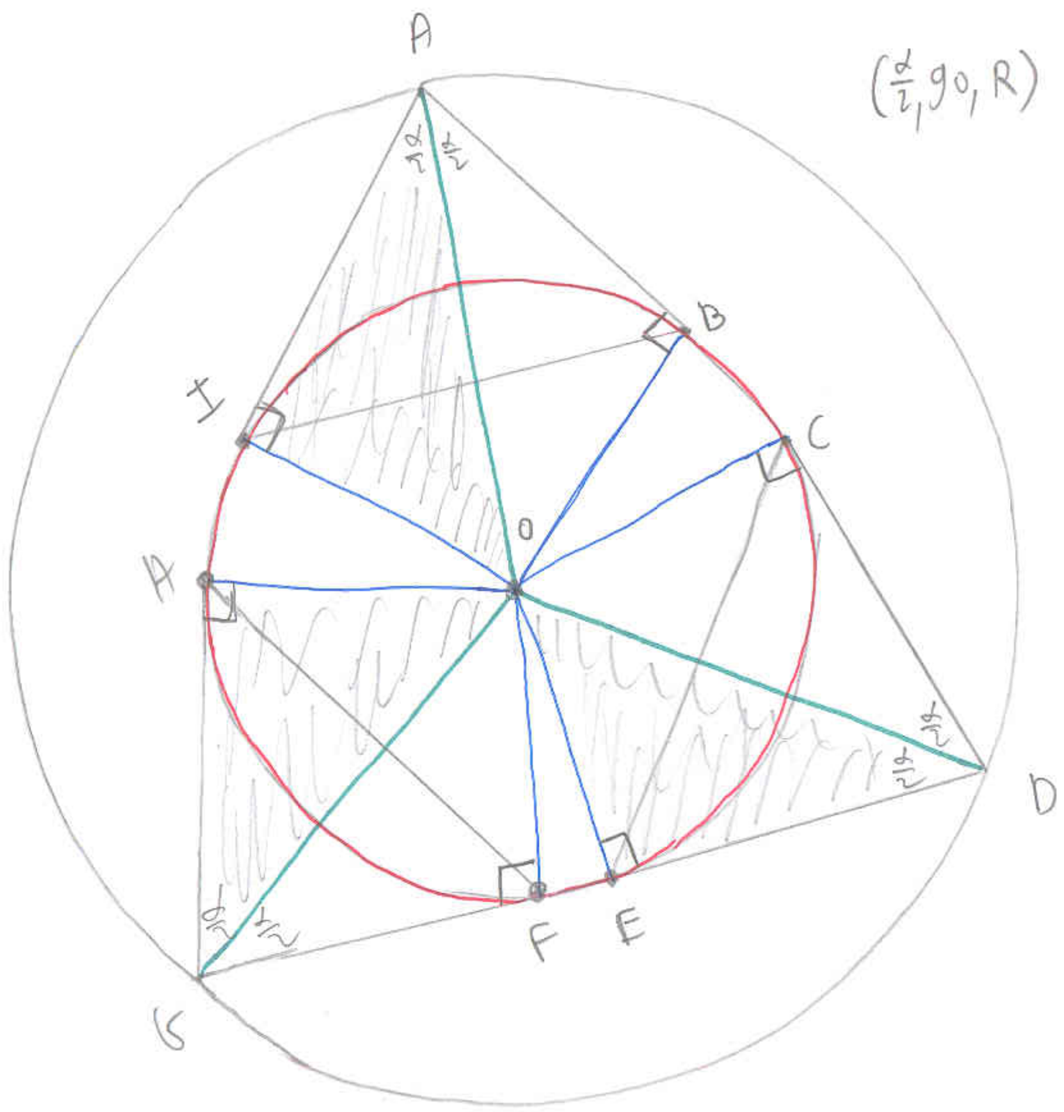
$x(x-4) \le 0$

$0 \le x \le 4$

$\boxed{1 \le x \le 4}$

או

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \le x \le 4 \\ x<0 \end{array}}$$



נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle D = \sphericalangle G = \alpha$

צ"ל: הנקודות A, D, G על מעגל

הוכחה: $\triangle AIO \cong \triangle GHO \cong \triangle DEO$ $\left(\frac{\alpha}{2}, 90, R\right)$

$\Downarrow$

$AO = OD = OG = R^*$

$\Downarrow$

הנקודות A, D, G

נמצאות על מעגל

שמרכזו ב- O

ורדיוסו OA

נתון: A, D, G על מעגל שמרכזו

בהוכחה הקודמת

צ"ל:

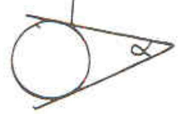
$\sphericalangle A = \sphericalangle D = \sphericalangle G = \alpha$

הוכחה: $\triangle AIO \cong \triangle GHO \cong \triangle DEO$ $(90, R, R^*)$

$\Downarrow$

$\sphericalangle A = \sphericalangle D = \sphericalangle G = \alpha \Leftarrow \sphericalangle IAO = \sphericalangle HGO = \sphericalangle EDO = \frac{\alpha}{2}$

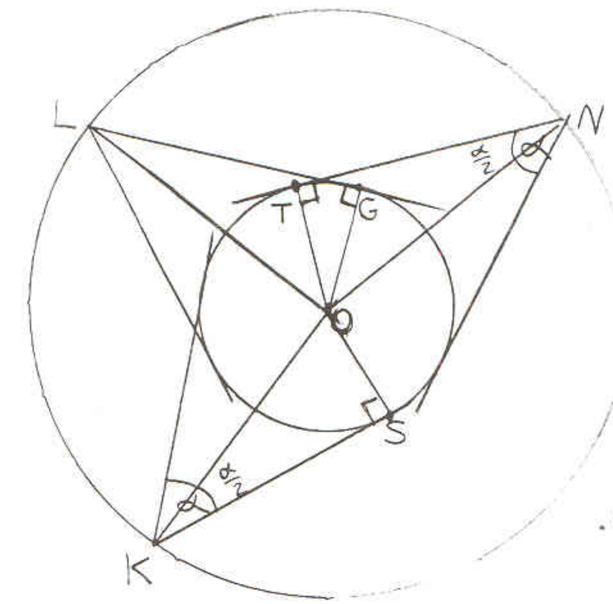
הוכח כי המקום הגיאומטרי של הנקודות, מהן רואים מעגל בזווית α, הוא מעגל.

(הגדרה: זווית ראיה של מעגל היא הזווית בין שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה חיצונית: )

<u>פתרון</u>

I נתון: נקודות $N, K\ldots$ מהן רואים מעגל O בזווית α

צ"ל: $N, K\ldots$ על מעגל



<u>הוכחה:</u> נעביר רדיוסים לנקודות ההשקה OS, OT כמתואר בשרטוט. $OT \perp ON$; $OS \perp KS$ (משיק מאונך לרדיוס המגיע לנק' ההשקה). $\angle ONT = \angle OKS = \frac{\alpha}{2}$ (חוצה זווית ראיה עובר דרך מרכז המעגל). $\triangle OTN \cong \triangle OSK$ (צ. $OT=OS$ רדיוסים; ז. $90°$; ז. $\frac{\alpha}{2}$) $\Leftarrow ON=OK \Leftarrow N, K$ על היקף מעגל שמרכזו O ורדיוסו ON.

כנ"ל הדבר נכון לגבי כל נקודה נוספת ממנה רואים את המעגל המקורי בזווית α.

II נתון: נק' L על היקף המעגל שהוגדר בסעיף I

צ"ל: מנק' L רואים את המעגל המקורי בזווית α.

<u>הוכחה:</u> נעביר רדיוס OG לנק' ההשקה.

$OG \perp LG$ (משיק מאונך לרדיוס המגיע לנק' ההשקה).

$\triangle OGL \cong \triangle OTN$ (צ. $OL=ON$ רדיוסים של המעגל שהוגדר, נתון כי L על הקפו

צ. $OG=OT$ רדיוסים של המעגל המקורי

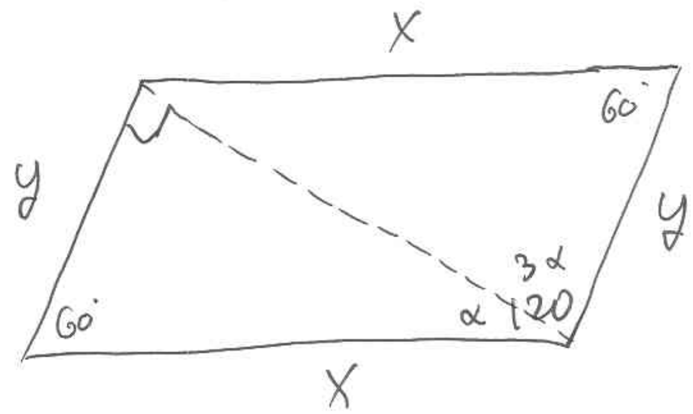
ז. $90°$ מול הצלע הגדולה מבין השתיים)

$\Leftarrow \angle GLO = \angle TNO = \frac{\alpha}{2} \Leftarrow$ זווית הראיה מ-L אל המעגל המקורי היא α

(כי חוצה זווית ראיה עובר דרך מרכז המעגל, LO חוצה זווית)

3

7

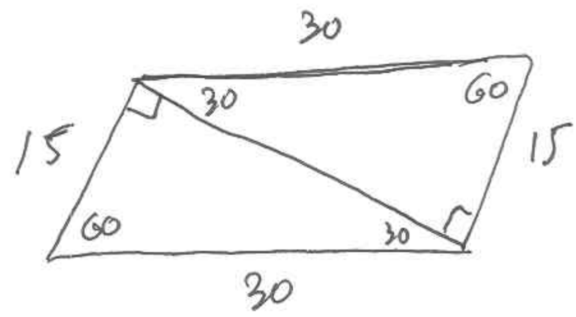


$$\alpha + 3\alpha = 120$$
$$4\alpha = 120$$
$$\alpha = 30$$
$$3\alpha = 90$$
$$\Downarrow$$
$$30, 60, 90$$

$$2x + 2y = 90^\circ$$
$$x + y = 45$$

$$2y = x$$

$$3y = 45$$
$$y = 15$$



פרק ג

$$(m+2)\frac{1}{x^2}-2(m+3)\cdot\frac{1}{x}+(m-1)=0$$

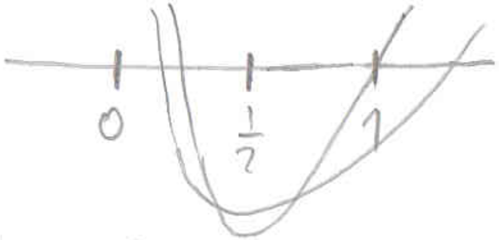
$x_1>2$

$0<x_2\le 1$

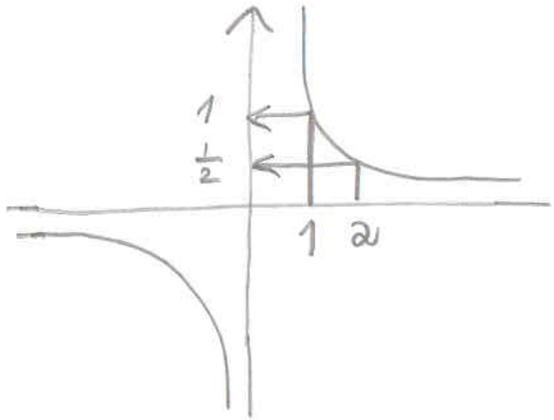
$$\frac{1}{x}=t$$

$m\to t\to \frac{1}{x}\to x$

$$(m+2)t^2-2(m+3)t+(m-1)=0$$



$m\neq -2$



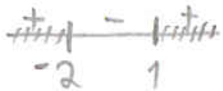
$$t^2-\frac{2(m+3)}{m+2}t+\frac{m-1}{m+2}=0$$

$x_1>2 \Rightarrow 0<t_1<\frac{1}{2}$

$0<x_2\le 1 \Rightarrow t_2\ge 1$

$F(0)>0$

$$\frac{m-1}{m+2}>0$$

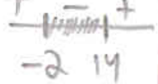


$F(\frac{1}{2})<0$

$$\frac{1}{4}-\frac{m+3}{m+2}+\frac{m-1}{m+2}<0$$

$$\frac{m+2-4m-12+4m-4}{4(m+2)}<0$$

$$\frac{m-14}{m+2}<0$$

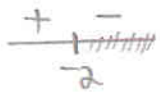


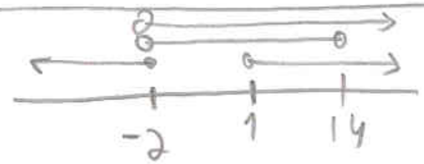
$F(1)\le 0$

$$1-\frac{2(m+3)}{m+2}+\frac{m-1}{m+2}\le 0$$

$$\frac{m+2-2m-6+m-1}{m+2}\le 0$$

$$\frac{-5}{m+2}\le 0$$

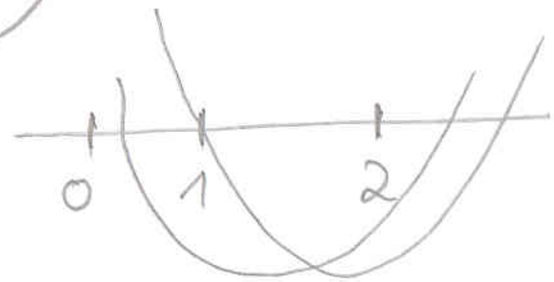




$$1<m<14$$

[illegible]

$$(m+2)\frac{1}{x^2}-2(m+3)\frac{1}{x}+(m-1)=0$$



$$(m-1)x^2-2(m+3)x+(m+2)=0$$

$m\neq 1$

$$x^2-\frac{2(m+3)}{m-1}x+\frac{m+2}{m-1}=0$$

$F(0)>0$

$$\frac{m+2}{m-1}>0$$

+ − +

−2 1

$F(1)\leq 0$

$$1-\frac{2(m+3)}{m-1}+\frac{m+2}{m-1}\leq 0$$

$$\frac{m-1-2m-6+m+2}{m-1}\leq 0$$

$$\frac{-5}{m-1}\leq 0$$

+ −

1

$F(2)<0$

$$4-\frac{4(m+3)}{m-1}+\frac{m+2}{m-1}<0$$

$$\frac{4m-4-4m-12+m+2}{m-1}<0$$

$$\frac{m-14}{m-1}<0$$

+ − +

1 14

$$\boxed{1<m<14}$$